

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 14 / 03 / 2026

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σελ. 133 σχολ.

**A2. α)** Σελ. 217 σχολ. **β)** Σελ. 129 σχολ.

**A3.** Σελ. 141 σχολ.

**A4. α)** Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Σωστό, **ε)** Σωστό.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2 \ln x + \alpha) = +\infty$ , διότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \alpha) = \alpha$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (-2 \ln x) = +\infty$ .



Άρα η  $x = 0$  είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $f$ .

**B2.** Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x-2}{x}$ .

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  και:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ , οπότε  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ .

Το πρόσημο της  $f'$  και η μονοτονία της  $f$  φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

$x$		0	2	$+\infty$
$f'$			-	+
$f$				

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 2]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$ .

Στην θέση  $x_0 = 2$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

**B3. (i)** Αφού το σημείο  $K(2,2)$  είναι το ελάχιστο της  $f$ , τότε θα είναι σημείο της γραφικής της παράστασης. Άρα:

$$f(2) = 2 \Leftrightarrow 2 - 2 \ln 2 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \alpha = \ln 2^2 \Leftrightarrow \alpha = \ln 4.$$

**(ii)** Το  $x_0 = 2$  είναι και θέση ολικού ελαχίστου, αφού:

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι: } 0 < x < 2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(2) \text{ και } x \geq 2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(2).$$

Οπότε  $f(x) \geq f(2)$  για κάθε  $x > 0$ . Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε:

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x - 2\ln x + \ln 4 \geq 2 \Leftrightarrow x - \ln x^2 + \ln 4 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x + \ln 4 \geq 2 + \ln x^2 \Leftrightarrow e^{x+\ln 4} \geq e^{2+\ln x^2} \Leftrightarrow e^x e^{\ln 4} \geq e^2 e^{\ln x^2} \Leftrightarrow 4e^x \geq e^2 x^2$$

$$\Leftrightarrow 4e^x \geq (ex)^2, \quad x > 0.$$

**B4.** Είναι:  $\int_1^e (f(x) - 2\ln 2) dx = \int_1^e (x - 2\ln x + \ln 4 - 2\ln 2) dx = \int_1^e x dx - 2 \int_1^e \ln x dx$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} - 2 \left[ [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx \right]$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - 2 \left[ e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \frac{e^2 - 1}{2} - 2 \left( e - \int_1^e 1 dx \right) =$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - 2(e - 1 \cdot (e - 1)) = \frac{e^2 - 1}{2} - 2(e - e + 1) = \frac{e^2 - 1}{2} - 2 = \frac{e^2 - 5}{2}.$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με:

$$g'(x) = (x)' f(x) + x f'(x) - \frac{1}{x} \Leftrightarrow g'(x) = f(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x} \Leftrightarrow g'(x) = 0.$$

Άρα  $g$  σταθερή στο  $(0, +\infty)$ . Για κάθε  $x = \frac{1}{e}$ , έχουμε:

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} f\left(\frac{1}{e}\right) - \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} (-e) - (-1) \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \text{ και εφόσον } g \text{ σταθερή, τότε } g(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

**Γ2.**  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x f(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow x f(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Εφόσον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της (αν υπάρχουν), θα είναι τα σημεία μηδενισμού της  $f'$  που βρίσκονται εσωτερικά του  $(0, +\infty)$ .

$$\text{Λύνουμε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το  $x = e$ .

**Γ3. (i)** Η  $h$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως πράξεις συνεχών, άρα θα είναι συνεχής και στο  $(0, 1]$ . Ελέγχουμε την συνέχεια στο  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} [x(1 - \ln x)] = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Εφόσον } \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$ , οπότε  $h$  συνεχής στο 0 άρα και στο  $[0, 1]$ .

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με παράγωγο:



$$h'(x) = \left( x^3 \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)' \Leftrightarrow h'(x) = (x - x \ln x)' \Leftrightarrow h'(x) = 1 - (x)' \ln x - x (\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = 1 - \ln x - x \frac{1}{x} \Leftrightarrow h'(x) = 1 - \ln x - 1 \Leftrightarrow h'(x) = -\ln x$$

Άρα η  $h$  είναι παραγωγίσιμη και στο  $(0, 1)$  και ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο  $[0, 1]$ .

**(ii)** Λύνουμε:  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Ο πίνακας προσήμων της  $h'$  και μονοτονίας της  $h$ :

$x$	0	1	$+\infty$
$h'$		+	-
$h$			

Η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για  $x = 1$ , το  $h(1) = 1 - 1 \ln 1 = 1$ .

Επίσης η  $h$  ορίζεται και είναι συνεχής και στο 0 (όπως δείξαμε σε προηγούμενο ερώτημα), οπότε για  $x = 0$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή  $h(0) = 0$ .

**Γ4.** Υπολογίζουμε το  $\int_1^{e^2} \frac{h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ . Θέτουμε  $u = \sqrt{x}$ , με  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$  και

Για  $x = 1 \Rightarrow u = 1$  και για  $x = e^2 \Rightarrow u = e$ , άρα:

$$\int_1^{e^2} \frac{h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^e \frac{h(u)}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^e h(u) du = 2 \int_1^e (u - u \ln u) du = 2 \int_1^e u du - 2 \int_1^e (u \ln u) du = 1,$$

Όπου:  $\int_1^e u du = \int_1^e \left(\frac{u^2}{2}\right)' du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$  και

$$\int_1^e (u \ln u) du = \int_1^e \left[ \left(\frac{u^2}{2}\right)' \ln u \right] du = \left[ \frac{u^2}{2} \ln u \right]_1^e - \int_1^e \left[ \frac{u^2}{2} (\ln u)' \right] du = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \int_1^e \left( \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{u} \right) du =$$

$$\frac{e^2}{2} - \int_1^e \left( \frac{u}{2} \right) du = \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{u^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left( \frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1^2}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Άρα  $I = 2 \frac{e^2 - 1}{2} - 2 \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^2 - 2}{2} - \frac{e^2 + 1}{2} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{2} = \frac{e^2 - 3}{2} > 1,$

εφόσον  $\frac{e^2 - 3}{2} > 1 \Leftrightarrow e^2 - 3 > 2 \Leftrightarrow e^2 > 5$ , που ισχύει.

Άρα και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, η εξίσωση  $h(x) = \frac{e^2 - 3}{2}$  είναι αδύνατη, εφόσον η  $h$  έχει ολικό μέγιστο το 1.

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Ισοδύναμα:  $e^{\alpha - f(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \ln e^{\alpha - f(x)} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \alpha - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha, x > 0.$

Όμως  $f(1) = \frac{\alpha^1}{1} = \alpha$ . Άρα η τελευταία ισοδύναμα γράφεται  $f(x) \geq f(1)$ .

Άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$ . Το  $x_0 = 1$  είναι εσωτερικό σημείο του  $(0, +\infty)$  και επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του

Fermat, θα ισχύει  $f'(1) = 0$ . Όμως είναι  $f'(x) = \frac{(\alpha^x)' x - (x)' \alpha^x}{x^2} = \frac{\alpha^x \ln \alpha \cdot x - \alpha^x}{x^2}$ .

Συνεπώς  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^1 \ln \alpha \cdot 1 - \alpha^1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = \alpha \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$

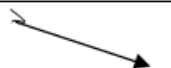

**Δ2. (i)** Είναι  $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$  και  $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}, x > 0$ . Οπότε θα είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$  και

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ . Το πρόσημο της  $f'$  και η μονοτονία της  $f$  είναι λοιπόν:

x	0	1	$+\infty$
f'		-	+
f			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Έστω τα σύνολα  $A_1 = (0, 1)$  και  $A_2 = [1, +\infty)$ . Έχουμε λοιπόν:

$$f(A_1) = f((0, 1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (e, +\infty),$$

$$f(A_2) = f([1, +\infty)) = \left[ f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [e, +\infty), \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^x \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το  $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [e, +\infty)$ .

(ii) Από το Δ2(i) γνωρίζουμε ότι για κάθε  $x > 0$  η f παρουσιάζει στο  $x=1$  ελάχιστο με τιμή  $f(1) = e$ . Δηλαδή ισχύει  $f(x) \geq e$ , για κάθε  $x > 0$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ . Άρα η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$f(f(x) - 2) = e \Leftrightarrow f(x) - 2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 3.$$

Εφόσον  $3 \in (e, +\infty) = f(A_1)$  και  $3 \in [e, +\infty) = f(A_2)$ , τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο  $A_1 = (0, 1)$ , η οποία είναι μοναδική, αφού f γνησίως μονότονη στο  $A_1$  και μία ρίζα στο  $A_2 = [1, +\infty)$ , η οποία είναι επίσης μοναδική, αφού f γνησίως μονότονη στο  $A_2$ . Συνεπώς 2 ρίζες στο σύνολο για την εξίσωση.

$$\Delta 3. (i) \text{ Για κάθε } x > 0, \text{ είναι: } f''(x) = \left( \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \right)' = \frac{(e^x \cdot x - e^x)' x^2 - (e^x \cdot x - e^x)(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{(e^x x + e^x - e^x) x^2 - 2x(e^x \cdot x - e^x)}{x^4} = \frac{e^x x^3 - 2e^x x^2 + 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Όμως  $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 > 0$ , οπότε για κάθε  $x > 0$  θα είναι  $f''(x) > 0$ , άρα η f είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ . Συνεπώς η f δεν έχει σημεία καμπής.

(ii) Για κάθε  $x > 1$  είναι  $1 < x < x^2 \Leftrightarrow 2027 < x + 2026 < x^2 + 2026$ .

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα  $[2027, x + 2026]$  και  $[x + 2026, x^2 + 2026]$ , οπότε υπάρχουν:

- ένα τουλάχιστον  $\xi_1 \in (2027, x + 2026)$ , για το οποίο ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+2026) - f(2027)}{x+2026-2027} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(x+2026) - f(2027)}{x-1}$$

- ένα τουλάχιστον  $\xi_2 \in (x+2026, x^2+2026)$ , για το οποίο ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+2026) - f(x+2026)}{x^2+2026 - (x+2026)} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+2026) - f(x+2026)}{x^2-x}$$

Όμως  $\xi_1 < \xi_2$  και εφόσον η  $f$  είναι κυρτή, άρα  $f'$  γνησίως αύξουσα, τότε θα είναι:

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x+2026) - f(2027)}{x-1} < \frac{f(x^2+2026) - f(x+2026)}{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+2026) - f(2027)}{x-1} < \frac{f(x^2+2026) - f(x+2026)}{x(x-1)}$$

$$\stackrel{x-1 > 0}{\Leftrightarrow} f(x+2026) - f(2027) < \frac{f(x^2+2026) - f(x+2026)}{x}$$

$$\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} xf(x+2026) - xf(2027) < f(x^2+2026) - f(x+2026)$$

$$\Leftrightarrow xf(x+2026) + f(x+2026) < f(x^2+2026) + xf(2027)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f(x+2026) < f(x^2+2026) + xf(2027).$$

**Δ4.** Η παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) συνάρτηση  $\phi$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0, 1]$ , άρα θα πρέπει  $\phi(0) = \phi(1)$ . Όμως:

$$\phi(0) = 0^2 + (f(e^\mu) + f(e^{\lambda+1}) - 2e - 1) \cdot 0 - f(e \cdot e^\lambda) + 2e = -f(e^{\lambda+1}) + 2e \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \phi(1) &= 1^2 + (f(e^\mu) + f(e^{\lambda+1}) - 2e - 1) \cdot 1 - f(e \cdot e^\lambda) + 2e = \\ &= 1 + f(e^\mu) + f(e^{\lambda+1}) - 2e - 1 - f(e^{\lambda+1}) + 2e = f(e^\mu). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα θα είναι } \phi(0) = \phi(1) \Leftrightarrow -f(e^{\lambda+1}) + 2e = f(e^\mu) \Leftrightarrow f(e^{\lambda+1}) + f(e^\mu) = 2e.$$

Όμως  $f(x) \geq e$ , για κάθε  $x > 0$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

Συνεπώς  $f(e^{\lambda+1}) \geq e$  με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$e^{\lambda+1} = 1 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ και}$$

$f(e^\mu) \geq e$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $e^\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = 0$ . Άρα τελικά:

$$f(e^{\lambda+1}) + f(e^\mu) = 2e \Leftrightarrow (f(e^{\lambda+1}) - e) + (f(e^\mu) - e) = 0 \Leftrightarrow f(e^{\lambda+1}) - e = 0 \text{ και } f(e^\mu) - e = 0$$

$$\Leftrightarrow f(e^{\lambda+1}) = e \text{ και } f(e^\mu) = e \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ και } \mu = 0.$$